PERBEDAAN SIFAT KOSET DAN KOSET *SMARANDACHE*

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Jurusan Matematika

oleh :

NIKI OKTAFIANA
10554001587

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2010

PERBEDAAN SIFAT KOSET DAN KOSET *SMARANDACHE*

<u>NIKI OKTAFIANA</u>
NIM: 10554001587

Tanggal Sidang: 29 Juni 2010
Periode Wisuda: Oktober 2010

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Pengertian koset *Smarandache* didasarkan pada pengertian dari semigrup *Smarandache.* Semigrup *Smarandache* didefinisikan sebagai suatu semigrup *A* yang jika *proper subset* nya merupakan grup. Koset *Smarandache* adalah suatu himpunan *A* yang merupakan semigrup *Smarandache* memiliki *proper subset* $H \subseteq A$, di mana *proper subset* tersebut merupakan grup terhadap operasi yang sama terhadap *A*, maka untuk setiap $a \in A$ koset *Smarandache*nya adalah $Ha = \{ha / h \in H\}$ dan $aH = \{ah / h \in H\}$. Bentuk koset *Smarandache* sama dengan koset pada aljabar abstrak. Namun, kedua koset tersebut memiliki perbadaan sifat. Dari pembahasan diperoleh perbedaan sifatnya, yaitu pada koset *Smarandache* tidak terdapat tidak terdapat korespondensi satu-satu antara dua koset kanan dalam *H* pada semigrup *Smarandache A.* Sedangkan pada koset pada aljabar abstrak terdapat korespondensi satu-satu antara dua koset kanan *H* dalam *G*.

Kata Kunci: Korespondensi Satu-satu, Koset *Smarandache,* Semigrup *Smarandache*.

DIFFERENT BETWEEN COSET AND SMARANDACHE COSET CHARACTERISTIC

NIKI OKTAFIANA
NIM: 10554001587

Date of Final Exam: June 29th, 2010
Graduation Ceremony Priod: October, 2010

Mathematic Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Smarandache coset are based on with the Smarandache semigroup. Smarandache semigroup is defined to be a semigroup A such that a proper subset of A is a group. Definition of Smarandache coset is an A set which is Smarandache Semigroup has a proper subset $H \subset A$ *, where proper subset is group to the same operation of A. So that for each* $a \in A$*. The coset Smarandache is* $Ha = \{ha / h \in H\}$ *and* $aH = \{ah / h \in H\}$ *. Smarandache coset is same with abstract algebraic coset. Althought, both of the coset has different characteristic. Based of description, the resulting different characteristic , that the does not have one to one correspondence between two cosets in H on Smarandache semigroup A. While abstract algebraic coset has one to one correcpondence between two right cosets H in G..*

***Keywords**: One to one Correspondence, Smarandache Coset, Smarandache Semigroup.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar (*Algebra*) pertama kali diperkenalkan oleh Al Khawarizmi, yang merupakan seorang ilmuan jenius pada masa keemasan Baghdad. Karyanya, Kitab Aljabr Wal Muqabalah (Pengutuhan Kembali dan Pembandingan) merupakan pertama kalinya dalam sejarah di mana istilah aljabar muncul dalam konteks disiplin ilmu. Nama aljabar diambil dari bukunya yang terkenal tersebut. Karangan itu sangat populer di negara-negara barat dan diterjemahkan dari bahasa Arab ke bahasa Latin dan Italia. Bahasan yang banyak dibahas oleh ilmuwan barat dari karangan Al-Khawarizmi adalah tentang persamaan kuadrat. Aljabar telah digunakan oleh matematikawan sejak beberapa ribu tahun yang lalu. Sejarah mencatat penggunaan aljabar telah dilakukan bangsa Mesopotamia pada 3.500 tahun yang lalu dan telah mengalami berbagai perkembangannya hingga saat ini.

Di aljabar, kita tidak bekerja secara langsung dengan bilangan melainkan bekerja dengan menggunakan simbol variabel dan elemen-elemen himpunan. Sebagai contohnya yaitu operasi penambahan dan perkalian yang dipandang sebagai operasi secara umum dan definisi ini menuju pada struktur bilangan seperti yang terdapat pada grup, subgrup, koset dan masih banyak lagi.

Sekarang ini, istilah aljabar mempunyai makna lebih luas daripada sekedar aljabar elementer yang sering kita dengar. Aljabar lain yang dimaksud antara lain yaitu meliputi aljabar abstrak, aljabar linier, dan sebagainya. Hal yang menarik dari pembagian aljabar ini adalah mengenai aljabar abstrak, yang juga dikenal dengan aljabar moderen. Aljabar abstrak merupakan ilmu aljabar yang mempelajari tentang struktur aljabar semacam grup, ring, median, dan masih banyak lagi.

Pengembangan ilmu aljabar salah satunya terdapat pada jurnal yang ditulis oleh Raul Padilla pada tahun 1999 tentang sturuktur Aljabar *Smarandache.* Raul melanjutkan penelitian terdahulu yang ditulis oleh Florentin Smarandache yang dikenal dengan judul ”*Special Algebraic Structure*”. Dalam penelitiannya, Padilla menjelaskan mengenai konsep struktur aljabar *Smarandache* yang sebagian besarnya tentang asosiatif operasi biner.

Berdasarkan konsep struktur aljabar *Smarandache* yang ditulis oleh Raul Padilla, selanjutnya W.B.Vasantha Kandasamy kemudian memperkenalkan tentang koset *Smarandache*. Sifat koset *Smarandache* yang dijelaskan di dalam jurnal tersebut memiliki perbedaan dengan sifat koset dalam struktur aljabar abstrak. Berdasarkan hal tersebut, penelitin tertarik untuk mengangkat permasalahan mengenai sifat yang menbedakan antara koset dengan koset *Smarandache* dalam bentuk skripsi dengan judul ” Perbedaan Sifat Koset dan Koset *Smarandache* ”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan paparan dari latar belakang di atas, maka permasalahan yang diangkat dalam tulisan ini adalah mengenai konsep koset *Smarandache* dan menentukan perbedaan sifat koset dengan koset *Smarandache*.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam tulisan ini dibatasi pada konsep koset *Smarandache* dan penentuan perbedaan sifat koset dengan koset *Smarandache*.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini antara lain adalah :

1. Pengenalan tentang konsep dari koset *Smarandache*.
2. Menentukan perbedaan sifat koset dengan koset *Smarandache*.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam pembuatan tulisan ini mencakup 5 bab, yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini berisikan tentang teori-teori, metode atau teorema yang digunakan dalam penulisan.

Bab III Metode Penelitian

Bab ini berisikan tentang cara-cara atau langkah-langkah dalam memperkenalkan konsep koset *Smarandache* dan menentukan perbedaan sifat koset dengan koset *Smarandache*.

Bab IV Pembahasan dan Analisa

Bab ini berisikan tentang penyelesaian dalam menentukan perbedaan sifat koset *Smarandache*.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan tentang kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab II berisikan penjabaran tentang beberapa landasan teori yang akan digunakan dan sangat membantu sekali dalam penjelasan pada bab berikutnya. Adapun landasan teori yang digunakan dalam penulisan ini berisi tentang konsep-konsep dasar dalam struktur aljabar, seperti definisi himpunan, definisi operasi biner, definisi tentang teori-teori dalam grup, dan beberapa lainnya yang disertai dengan beberapa contoh yang sebagian besar diambil dari buku karangan Soeharti Soebagio dan Sukirman yang berjudul ”*Struktur Aljabar*”.

2.1 Himpunan

Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek (elemen, unsur, atau anggota) yang mempunyai sifat tertentu dan didefinisikan dengan jelas. Objek dalam himpunan disebut elemen himpunan, unsur himpunan, atau anggota himpunan. Untuk menyatakan himpunan digunakan huruf besar (huruf kapital) seperti *A* , *B*, *C*,.., sedangkan anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil *a* , *b*, *c* ,....

Misalkan *S* adalah kumpulan dari objek-objek, maka objek-objek dari *S* disebut elemen-elemen (anggota-anggota) dari *S*. Objek-objek dari *S* harus didefinisikan dengan jelas, artinya jika ditunjuk suatu objek tertentu, maka objek tersebut dapat dengan jelas ditentukan apakah sebagai elemen dari *S* atau bukan elemen dari *S* dan tidak sekaligus sebagai elemen *S*.

Untuk menyatakan bahwa suatu objek merupakan suatu anggota himpunan, misalnya *a* adalah elemen *S*, dapat ditulis $a \in S$. Untuk menyatakan sebaliknya, yaitu *a* bukan elemen *S* dapat ditulis $a \notin S$.

Contoh 2.1

1) Himpunan bilangan bulat : $B = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$.
2) Himpunan tujuh bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4,5,6,7\}$.

3) Himpunan empat bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.

4) $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$

5) $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$

6) $K = \{ \{\} \}$

7) Misalkan: $A = \{0,1, 2, 3, 4\}$.

$R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$.

$U = \{\{\}\}$.

Maka elemen-elemen dari himpunan-himpunan tersebut adalah :

a. $2 \in A$. c. $\{a, b, c\} \in R$. e. $d \notin R$.

b. $\{\} \in U$. d. $\{\} \notin R$. f. $5 \notin B$.

Definisi 2.1: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Himpunan S disebut himpunan bagian (*subset)* dari T jika dan hanya jika setiap anggota dari S menjadi anggota dari T yang dinotasikan dengan $S \subseteq T$. Apabila $S \subseteq T$ dan $T \subseteq S$ maka $S = T$.

Contoh 2.2

$A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{1,2,3,4\}$, maka $A \subseteq B$.

Beberapa operasi dalam himpunan :

1. $A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$.
2. $A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$.
3. $A - B = \{x \in S \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.
4. $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
5. $A^c = \{x \in S \mid x \notin A\}$.
6. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$.

Definisi 2.2: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Himpunan A disebut himpunan sejati (*proper subset*) dari himpunan B, jika dan hanya jika setiap anggota A menjadi anggota B dan paling sedikit satu anggota B tidak menjadi anggota A. *Proper subset* dilambangkan dengan $"\subset"$.

Dari dua definisi di atas, maka dapat disimpulkan bahwasanya setiap *proper subset* adalah *subset* dan setiap *subset* belum tentu *proper subset*.

Contoh 2.3

$S = \{5,6,7,8,9\}$, $T = \{4,5,6,7,8,9\}$ dan $U = \{4,5,6,7,8,9\}$

maka $S \subset T$ dan $T \subseteq U$ tetapi $T \not\subset U$.

Penjabaran selanjutnya, akan dibahas tentang pemetaan. Pemetaan merupakan salah satu konsep yang sangat penting dalam matematika. Pemetaan mendefinisikan hubungan antara satu himpunan dengan himpunan yang lain.

2.2 Pemetaan

Himpunan S dan T adalah himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan S dengan tepat satu elemen pada himpunan T disebut pemetaan dari himpunan S ke himpunan T. Aturan yang mengaitkan tersebut diberi simbol f sehingga dapat dikatakan bahwa f adalah pemetaan dari S ke T dan dilambangkan sebagai :

$$f : S \rightarrow T \text{ atau } S \xrightarrow{f} T \text{ .}$$

dibaca ” fungsi f dari S *ke* T ” atau ” f adalah pemetaan dari S ke T ”. Himpunan S disebut daerah asal (*domain*) dari f dan himpunan T disebut daerah kawan (*kodomain*) dari pemetaan f. Apabila s suatu elemen tertentu dari S, maka hanya ada tepat satu elemen $t \in T$ yang merupakan pasangan dari $s \in S$ oleh pemetaan f tersebut. Selanjutnya dikatakan bahwa t adalah peta atau bayangan dari s oleh f dan ditulis $t = f(s)$. Semua elemen dari S harus mempunyai peta atau bayangan dalam T dan sebaliknya tidak perlu setiap elemen dari T merupakan peta dari elemen S. Himpunan semua elemen T yang merupakan peta dari elemen-elemen S

disebut daerah hasil atau jelajah (*range*) dari pemetaan *f* yang dinyatakan dengan *f*(*S*), sehingga :

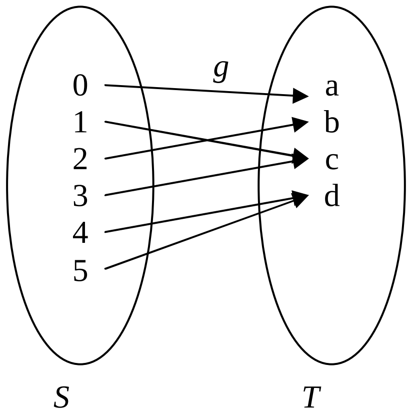
$$f(S) = \{t \in T \mid t \in f(s), s \in S\} = \{f(s) \in T \mid s \in S\},$$

dapat dikatakan juga bahwa $f(S) \subseteq T$.

Contoh 2.4

Misalkan $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $T = \{a, b, c, d\}$.

Pemetaan $g : S \to T$ didefinisikan seperti pada gambar 2.1 di bawah ini.



Gambar 2.1. Diagram panah pemetaan $g : S \to T$.

Daerah hasil pemetaan g adalah $\{a, b, c, d\}$. Jika $A = \{0,1,2,3\}$, maka $g(A) = \{a, b, c\}$. Perhatikan bahwa $g(0) = a$. Dikatakan bahwa *b* adalah peta atau bayangan dari 2 oleh pemetaan *g*. Dikatakan pula bahwa 2 adalah prapeta (bayangan *invers*) dari *b* oleh pemetaan *g*, dan ditulis $g^{-1}(b) = \{2\}$. Selanjutnya, dapat diperiksa bahwa $g^{-1}(a) = \{0\}$, $g^{-1}(c) = \{1,3\}$, dan $g^{-1}(d) = \{4,5\}$, serta $g^{-1}(a, b, c,) = \{0,1,2,3\}$.

Misalkan $g : S \to T$ adalah suatu pemetaan jika $t \in T$, maka himpunan semua elemen dari *S* yang dipetakan ke *t* di sebut prapeta dari *t* oleh *f* dan dinyatakan dengan lambang $f^{-1}(t)$. Sehingga, $f^{-1}(t) = \{x \in S \mid f(x) = t\}$ adalah himpunan semua prapeta dari *t* oleh pemetaan *f*. Jika $B \subset T$, maka

$f^{-1}(B) = \{x \in S \mid f(x) \subset B\}$ adalah himpunan semua elemen dari S yang merupakan prapeta elemen dari *B*.

Definisi 2.3: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Suatu pemetaan $f : S \rightarrow T$ disebut pemetaan surjektif jika setiap elemen dari daerah kawan (*codomain*) mempunyai pasangan dengan suatu elemen dari daerah asal (*domain*).
Secara simbolik dapat dituliskan:
pemetaan $f : S \rightarrow T$ dikatakan surjektif $\Leftrightarrow \forall t \in T, \exists x \in S \ni f(x) = t$.
Hal ini berarti prapeta dari setiap elemen daerah kawan selalu tidak kosong karena daerah hasilnya sama dengan daerah kawan. Secara simbolik dapat ditulis :
pemetaan $f : S \rightarrow T$ dikatakan surjektif $\Leftrightarrow \forall x \in T, f^{-1} \neq \Phi$.

Contoh 2.5

Diberikan $A = \{x \in R : x \neq 1\}$ dengan definisi $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}, \forall x \in A$.

Tunjukkan apakah *f*(*x*) pemetaan surjektif.

Jawab :
Berdasarkan definisi 2.3, untuk menunjukkan *f*(*x*) adalah surjektif, maka dapat diselesaikan dengan cara mencari nilai *range* dari *f*(*x*), yaitu :

$$y = \frac{2x}{x-1}, x \neq 1$$
$$x = \frac{2y}{y-1}$$
$$2y = xy - x$$
$$2y - xy = -x$$
$$xy - 2y = x$$
$$y(x-2) = x$$
$$y = \frac{x}{(x-2)},\ x = \frac{y}{(y-2)},\ y \neq 2$$

Maka dapat disimpulkan bahwa $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ dengan syarat $x \neq 1$ dan $y \neq 2$ adalah surjektif.

Definisi 2.4: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Suatu pemetaan $f: S \to T$ disebut injektif atau pemetaan satu-satu jika dan hanya jika $\forall x \in f(S), f^{-1}(x)$ merupakan himpunan tunggal (himpunan yang hanya memuat satu elemen).

Berdasarkan definisi di atas, dapat dikatakan bahwa setiap elemen dari daerah hasil mempunyai prapeta tepat satu elemen dari daerah asal. Artinya setiap dua elemen yang berlainan dalam daerah asal mempunyai peta yang berlainan dalam daerah kawan. Secara simbolik dapat dituliskan :

pemetaan $f: S \to T$ dikatakan injektif $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in S, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Dalam penerapannya, sering digunakan kontraposisinya, yaitu :

pemetaan $f: S \to T$ dikatakan injektif $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in S, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Contoh 2.6

Berdasarkan contoh pada 2.5, buktikan apakah pemetaan tersebut injektif?

<u>Jawab</u> :

Untuk menunjukkan *f*(*x*) adalah injektif adalah dengan menunjukkan jika diambil $f(x) = f(y)$ maka akan dibuktikan $x = y$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x-1} &= \frac{2y}{y-1} \\
2x(y-1) &= 2y(x-1) \\
2xy - 2x &= 2xy - 2y \\
-2x &= -2y \\
2x &= 2y \\
x &= y
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $f(x)$ adalah injektif.

Definisi 2.5: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Suatu pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif disebut pemetaan bijektif atau korespondensi satu-satu.

Contoh 2.7

Misalkan R ={himpunan semua bilangan riil}. Pemetaan $f : R \to R$ didefinisikan oleh $f(x) = 4x + 3, \forall x \in R$, adalah pemetaan injektif sekaligus surjektif.

<u>Jawab</u> :

Pemetaan $f : R \to R$ injektif karena jika $a, b \in R$ sedemikian hingga , $f(a) = f(b)$, yaitu , $4a + 3 = 4b + 3$ maka $a = b$. Jelas bahwa pemetaan tersebut injektif.

Dimisalkan $d \in R$ dan $c \in R$, dengan $c = \left(\frac{d-3}{4}\right)$ sedemikian hingga $f(c) = f\left(\frac{d-3}{4}\right) = 4\left(\frac{d-3}{4}\right) + 3 = d$.

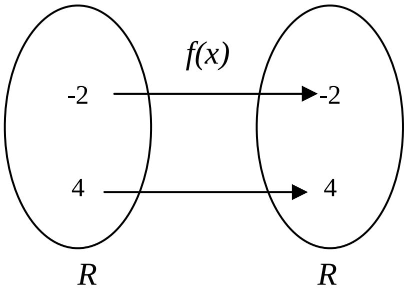
Ambil sebarang $d = (-2)$, maka akan didapat :

$$
\begin{aligned}
g(c) &= 4\left(\frac{(-2)-3}{4}\right)+3 \\
&= 4\left(\frac{(-5)}{4}\right)+3 \\
&= (-5)+3 \\
&= (-2)
\end{aligned}
$$

Sedangkan untuk , $d = (4)$ didapat :

$$
\begin{aligned}
g(c) &= 4\left(\frac{4-3}{4}\right)+3 \\
&= 4\left(\frac{1}{4}\right)+3 \\
&= 1+3 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Pemetaan di atas dapat digambarkan dengan diagram panah seperti di bawah ini :



Gambar 2.2. Diagram panah untuk contoh 2.7.

Jelas bahwa pemetaan $f(x) = 4x + 3, \forall x \in R$ merupakan pemetaan surjektif sehingga dapat disimpulkan bahwa pemetaan tersebut merupakan pemetaan bijektif (korespondensi satu-satu).

Pada himpunan bilangan, kita mengenal beberapa operasi bilangan seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, pemangkatan, penarikan akar, dan lain sebagainya yang kita kenal dengan operasi hitung pada bilangan. Operasi hitung dalam bilangan disebut operasi biner. Di bawah ini, akan dibahas secara terperinci tentang operasi biner.

2.3 Operasi Biner

Definisi 2.6: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Diberikan G suatu himpunan tak kosong. Operasi $*$ pada elemen-elemen S disebut operasi biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in G$ maka $(a * b) \in G$.

Sifat-sifat operasi biner :

a. Operasi biner $*$ pada himpunan S dikatakan tertutup jika $\forall a, b \in G, \exists c \in G$ maka $a * b = c \in G$.

b. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut komutatif jika dan hanya jika $\forall a, b \in G,$ berlaku $a * b = b * a$.

c. Operasi biner $*$ pada himpunan S disebut asosiatif jika dan hanya jika $\forall a, b, c \in G,$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Operasi biner $*$ pada himpunan berhingga dapat dinyatakan dalam bentuk tabel atau daftar. Tabel Cayley merupakan salah satu cara untuk mendefinisikan operasi biner pada himpunan, khususnya himpunan berhingga.

Contoh 2.8

Himpunan $(Z_4,+)$. Tentukanlah hasil penjumlahan Z_4 tersebut!

Jawab :

Penjumlahan Z_4 dapat didefinisikan dengan tabel Cayley di bawah ini:

Tabel 2.1. Hasil $(Z_4,+)$.

$(+)$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Anggota yang dioperasikan dicantumkan pada baris pertama dan pada kolom pertama. Hasil kali anggota S dinyatakan dalam bujur sangkar yang di dalam, dimulai pada baris kedua dan kolom kedua.

Cara membaca tabel Cayley adalah sebagai berikut :

a. Anggota yang akan dioperasikan dari sebelah kiri kita baca pada kolom paling kiri.

b. Anggota yang akan dioperasikan dari sebelah kanan kita baca pada baris paling atas.

Untuk mengetahui sifat-sifat operasi biner melalui tabel sebagai berikut :

1. Jika penjumlahan dalam bujur sangkar hanya terdiri dari anggota S maka sifat tertutup dipenuhi.

2. Jika letak anggota dalam tabel simetris terdapat diagonal utama maka operasi biner komutatif. Pada tabel di atas operasi biner komutatif.
3. Untuk melihat sifat asosiatif harus dicoba bahwa $\forall a,b,c \in S$ memenuhi $(a+b)+c = a+(b+c)$. Ketiga anggota *a,b,c* tersebut tidak diharuskan semuanya berlainan, boleh dua anggota sama boleh juga tiga anggota yang sama.

   Asosiatif $\longrightarrow$ $\forall a,b,c \in S$ berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$.

   Tidak asosiatif $\longrightarrow$ $\exists\ a,b,c \in S$ sehingga $(a+b)+c \neq a+(b+c)$.

   Perhatikan tabel di atas :

   $$\begin{aligned} (1+2)+3 &= 1+(2+3) \\ 3+3 &= 1+1 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

   $\exists\ a,b,c \in S$ berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$.

   Jadi, operasi biner pada tabel di atas bersifat asosiatif.

Contoh 2.9

Diberikan $B = \{$ himpunan semua bilangan bulat $\}$ dengan operasi biner $*$ dan didefinisikan dengan $a*b = a+b-ab$. Tentukan sifat-sifat yang dimiliki oleh $(B,*)$!

<u>Jawab</u> :

- Karena $a \in B$ dan $b \in B$ maka $(B,*)$ bersifat tertutup.
- Untuk $a*b = a+b-ab$

  $b*a = b+a-ba$

  sehingga

  $$\begin{aligned} a+b-ab &= b+a-ba \\ a*b &= b*a. \end{aligned}$$

  Maka $(B,*)$ bersifat komutatif.

- Untuk $(a*b)*c = (a+b-ab)+c$

$$\begin{aligned} &= a+b-ab+c-(a+b-ab)c \\ &= a+b-ab+c-ac-bc+abc\ , \\ &= a+b+c-ab-ac-bc+abc \end{aligned}$$

- Untuk $a*(b*c) = a+(b+c-bc)$,

$$\begin{aligned} &= a+(b+c-bc)-a(b+c-bc) \\ &= a+b+c-bc-ab-ac+abc \\ &= a+b+c-ab-ac-bc+abc \end{aligned}$$

Maka $(B,*)$ bersifat assosiatif.

2.4 Grup

Pengertian grup dapat diperoleh melalui pengertian grupoid, semigrup, dan monoid yang akan dijabarkan di bawah ini. Selain itu, pengertian grup dapat juga diperoleh berdasarkan uraian beberapa sifat yang harus terpenuhi oleh suatu grup di bawah ini.

Defenisi 2.7: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Suatu himpunan dengan satu operasi biner $*$ di mana berlaku sifat tertutup disebut grupoid.

Definisi 2.8: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Diberikan suatu grupoid $(G,*)$. Jika $\forall a,b,c \in G$ memenuhi $(a*b)*c = a*(b*c)$, maka grupoid disebut semigrup. Semigrup dapat dikatakan grupoid yang memiliki sifat asosiatif.

Definisi 2.9: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Diberikan suatu semigrup $(G,*)$. Jika $\forall i \in G$ sedemikian sehingga $\forall a \in G$ memenuhi $i*a = a*i = a$ maka semigrup tersebut dikatakan monoid. Monoid dapat dikatakan semigrup yang mempunyai elemen identitas.

Definisi 2.10: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Suatu himpunan tidak kosong G dikatakan grup jika pada G didefenisikan suatu operasi biner, yang dinotasikan dengan $*$ atau (G, $*$), sehingga berlaku :

1. $a, b \in G$ sehingga $a \cdot b \in G$ (tertutup).
2. $a, b, c \in G$ sehingga $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (bersifat asosiatif).
3. Terdapat element $e \in G$ di G sehingga $a \times e = e \times a = a$ untuk setiap $a \in G$ dengan $e =$ element identitas (eksistensi element identitas di G).
4. Untuk setiap $a \in G$ memiliki suatu element $a^{-1} \in G$ sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (eksistensi invers di G).

sehingga dapat dikatakan bahwa grup adalah grupoida yang memenuhi sifat assosiatif, mempunyai elemen identitas, dan setiap anggotanya mempunyai invers.

Berdasarkan paparan di atas, pengertian grup dapat dijelaskan dengan menggunakan gambar di bawah ini :

Grupoid : $(G,*)$ berlaku sifat tertutup.

Semigrup : $(G,*)$ berlaku sifat assosiatif.

Monoid : $(G,*)$ memiliki elemen identitas.

Grupoid : $(G,*)$ berlaku ketiga sifat di atas dan memiliki invers.

Gambar 2.3. Bagan Teori Grup.

Definisi 2.11: (Herstein, 2000) Diberikan $(G, *)$ suatu grup. Jika memenuhi sifat komutatif di mana $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ maka $(G, *)$ disebut grup komutatif.

Contoh 2.10

$G = (Z_3, +)$. Tentukanlah hasil penjumlahan Z_3 tersebut.

Jawab :

Penjumlahan Z_3 pada *G* dapat dilihat pada tabel Cayley di bawah ini :

Tabel 2.2 Hasil $(Z_3,+)$.

(+)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

a. Bersifat tertutup karena hasil operasi penjumlahan Z_3 dalam tabel terdapat dalam anggota *G*.
b. Memenuhi sifat asosiatif penjumlahan.
c. *G* mempunyai elemen identitas 0.
d. Setiap anggota *G* dari penjumlahan modulo Z_3 memiliki invers, yaitu :

   Invers 0 adalah 0.

   Invers 1 adalah 2.

   Invers 2 adalah 1.
e. Letak anggota *G* dalam tabel simetris terhadap diagonal utama, sehingga $1+2=2+1$. Jadi, $(G,+3)$ merupakan grup komutatif.

Contoh 2.11

Diberikan $G=(Z_4,+)$. Tentukanlah hasil penjumlahan Z_4 tersebut.

Jawab :

Berdasarkan tabel 2.1, maka didapatlah :

a. Z_4 bersifat tertutup karena hasil operasi penjumlahan dalam tabel berada dalam anggota *G*.
b. Memenuhi sifat asosiatif penjumlahan.
c. *G* mempunyai elemen identitas 0.
d. Setiap anggota *G* dari penjumlahan modulo Z_4 memiliki invers, yaitu :

   Invers 0 adalah 0.

Invers 1 adalah 3.

Invers 2 adalah 2.

Invers 3 adalah 1

e. Letak anggota G dalam tabel simetris terhadap diagonal utama, sehingga $1+2=2+1$. Jadi, $(G,+3)$ merupakan grup komutatif.

Contoh 2.12

Matriks $(M_{22},\bullet)$ di mana $M_{2x2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in R \right\}$.

Apakah matriks $(M_{22},\bullet)$ merupakan grup ?

<u>Jawab</u> :

- Matriks M_{2x2} adalah tertutup.

  Ambil $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in R$.

  Ambil $M_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, eh - fg \neq 0, e, f, g, h \in R$.

  Maka $M_1 \ x \ M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

  $$= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg)$$

  $$= (acef+adeh+bcfg+bdgh) - (acef+adfg+bceh+bdgh)$$

  $$= (adeh+bcfg) - (adfg+bceh)$$

  $$= (ad+bc) - (eh+fg) \neq \phi$$

- Assosiatif, karena $M_1(M_2 M_3) = (M_1 M_2)M_3$, $\forall M_1, M_2, M_3 \in M_{2x2}$.

- Terdapat elemen identitas, yaitu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Karena $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Setiap elemen ada invers

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{d}{ad-bc}\right)\left(\frac{a}{ad-bc}\right) - \left(\frac{-b}{ad-bc}\right)\left(\frac{-c}{ad-bc}\right)$$

$$= \left(\frac{ad}{(ad-bc)^2}\right) - \left(\frac{bc}{(ad-bc)^2}\right)$$

$$= \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \neq \phi$$

Jadi , $\forall A \in M_{2x2}\ \exists A^{-1} \in M_{2x2}$.

$$\left[\frac{1}{ad-bc}\right]\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\frac{1}{ad-bc}\right]\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I$$

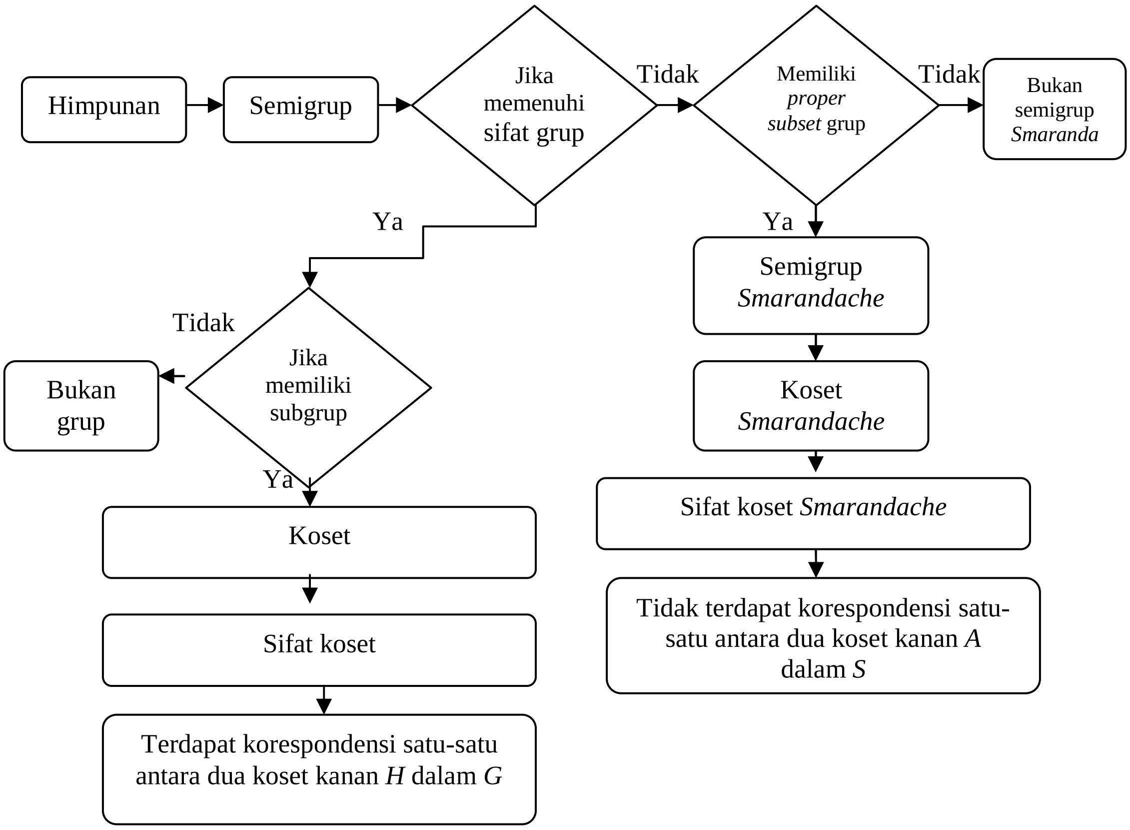
Sehingga $\exists\ A A^{-1} = A^{-1} A = I$ di mana I adalah elemen identitas.

Berdasarkan penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa matriks M_{2x2} memenuhi sifat-sifat grup dan matriks M_{2x2} dikatakan grup.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang pakai oleh penulis dalam tulisan ini adalah metodologi studi literatur terhadap referensi-referensi yang berhubungan dengan struktur aljabar dengan langkah-langkah yang dibuat dalam bentuk *flowchart* seperti di bawah ini :



BAB IV
ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab IV ini akan dibahas tentang koset, pengenalan konsep *Smarandache* dan teorema yang kemudian akan digunakan dalam menentukan sifat koset *Smarandache*. Konsep dasar yang digunakan dalam menentukan sifat koset *Smarandache* adalah semigrup *Smarandache*. Cara-cara yang digunakan akan dijabarkan di bawah ini yang disertai dengan contoh.

4.1 Subgrup

Pengertian subgrup yang dibahas ini selanjutnya akan diperlukan dalam pembahasan koset suatu himpunan.

Definisi 4.1: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Diberikan $(G, *)$ suatu grup dan H subset dari G ($H \subseteq G$ *dan* $H \neq \emptyset$), apabila $(H, *)$ suatu grup, maka dikatakan bahwa H adalah subgrup dari *G*. Penulisan $(G, *)$ dan $(H, *)$ tersebut menerangkan bahwa apabila H subgrup dari *G*, maka operasi pada H harus sama dengan operasi pada G.

Contoh 4.1

Diberikan $(G, \bullet)$ merupakan grup dengan $G = \{1, -1, i, -i\}$. Terdapat $H = \{-1, 1\}$ merupakan subset dari *G*. Tentukan apakah $(H, \bullet)$ subgrup dari $(G, \bullet)$!

<u>Jawab</u> :

$H = \{-1, 1\}$

- Bersifat tertutup karena $\forall a, b \in G$ berlaku $a \bullet b \in G$.
- Assosiatif
- Terdapat elemen identitas yaitu 1

- Masing-masing anggota memiliki invers :

$$\begin{aligned}(-1)&=(-1)\\1&=1\end{aligned}.$$

Karena $(H,\bullet)$ bersifat grup, maka $(H,\bullet)$ dikatakan sebagai subgrup dari G.

Di bawah ini diberikan suatu teorema yang berhubungan dengan sifat-sifat subgrup.

Teorema 4.1: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Diberikan $(G, *)$ suatu grup. $S \subset G$ dan $S \neq \phi$.

S adalah subgrup dari *G* jika dan hanya jika :

i. Untuk setiap $a,b \in S$ terdapat $a * b \in S$ (*S* tertutup terhadap operasi $*$)

ii. Untuk setiap $a \in S$ terdapat $a^{-1} \in S$

Bukti :

$\Rightarrow$ Ambil $a,b \in S$, karena *S* subgrup maka memenuhi sifat tertutup, bersifat asosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap anggota mempunyai invers. Berdasarkan sifat tertutup dan setiap anggota *S* mempunyai invers dalam grup, maka dapat disimpulkan :

i. $\forall a, b \in S$ maka $a * b \in S$.

ii. $\forall a \in S$ maka $a^{-1} \in S$ ■.

$\Leftarrow$ Diketahui bahwa $\forall a,b \in S$ memenuhi $a * b \in S$ dan $\forall a \in S$ maka $a^{-1} \in S$, dapat dibuktikan bahwa $(S, *)$ subgrup dari $(G, *)$.

a. $\forall a, b \in S$ memenuhi $a * b \in S$.

Jadi sifat tertutup terpenuhi.

b. Karena $S \subset G$ maka *S* mempunyai sifat asosiatif.

c. $\forall a \in S$ maka $a^{-1} \in S$.

Karena tertutup, maka $a * a^{-1} = i$ dan $i \in S$. *S* mempunyai elemen identitas.

d. $\forall a \in S$ maka $a^{-1} \in S$.

Berarti setiap anggota *S* mempunyai invers. Sehingga $(S, *)$ subgrup dari $(G, *)$ ■.

4.2 Koset

Defenisi 4.2: (Suharti Soebagio dan Sukirman, 1999) Diberikan *H* suatu subgrup dari grup *G* dan *a* suatu elemen dari *G*, maka:

1. $Ha = \{ ha \mid h \in H \}$ disebut koset kanan dari *H* dalam *G*.
2. $aH = \{ ah \mid h \in H \}$ disebut koset kiri dari *H* dalam *G*.

karena *H* subgrup dari *G*, maka $e \in H$ (*e* elemen identitas), sehingga $He = \{he \mid h \in H\} = H$ dan $eH = \{eh \mid h \in H\} = H$. Sehingga tidak ada koset kiri atau koset kanan yang merupakan himpunan kosong.

4.3 Sifat Koset

Sifat koset yang akan dibahas yaitu dengan membuktikan teorema di bawah ini.

Teorema 4.2 : (Herstein, 2000) Terdapat korespondensi satu-satu antara dua koset kanan dari subgrup *H* di *G*.

Bukti :

Diberikan *G* adalah grup dan *H* adalah subgrup dari *G*. $\forall a, b \in G$ dan Ha dan Hb yang merupakan koset kanan pada *G*.

Akan didefinisikan $f : Ha \rightarrow Hb$

$$f :(ha) = hb$$

Akan dibuktikan bahwa pemetaannya adalah satu-satu (injektif).

$$f : Ha \rightarrow Hb$$

$$f :(ha) = hb$$

Ambil sebarang $h_1 a,\ h_2 a \in Ha$

dengan $f:(h_1 a) = f(h_2 a)$

maka akan dibuktikan bahwa :

$h_1 a = h_2 a$ dengan cara

$$
\begin{aligned}
f(h_1 a) &= f(h_2 a) \\
h_1 b &= h_2 b \\
h_1 &= h_2 \\
h_1 a &= h_2 a
\end{aligned}
$$

Akan dibuktikan bahwa pemetaannya adalah pada (surjektif)

Ambil sebarang $x \in Hb$, akan dibuktikan bahwa :

$(\forall x \in Hb)\ (\exists y \in Ha)$ maka $f\ (y) = x$.

$x \in Hb \Rightarrow h_1 b$ untuk suatu $h_1 \in H$.

Terdapat $y = Ha \Rightarrow y = h_1 a$ untuk suatu $h_1 \in H$, sehingga

$$
\begin{aligned}
f(y) &= f(h_1 a) \\
&= h_1 b \\
&= x \ \blacksquare.
\end{aligned}
$$

Dari pembuktian di atas dapat disimpulkan bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara dua koset kanan dalam *G*.

Contoh 4.2

Misalkan $G = (Z_7, \bullet)$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 7 yang bukan 0 dengan operasi perkalian. $G = (Z_7, \bullet)$ grup dengan $H = \{1,6\}$ merupakan subgrup dari *G*. Tentukan koset kanan dan koset kiri dari subgrup tersebut !

Jawab :

Berdasarkan definisi 4.2, maka diperoleh koset kanan dan koset kiri nya, yaitu :

- Koset Kanan

$$H1 = \{1\times1,\ 6\times1\} = \{1, 6\}$$
$$H2 = \{1\times2,\ 6\times2\} = \{2, 5\}$$
$$H3 = \{1\times3,\ 6\times3\} = \{3, 4\}$$
$$H4 = \{1\times4,\ 6\times4\} = \{4, 3\}$$
$$H5 = \{1\times5,\ 6\times5\} = \{5, 2\}$$
$$H6 = \{1\times6,\ 6\times6\} = \{6, 1\}$$

- Koset Kiri

$$1H = \{1\times1,\ 1\times6\} = \{1, 6\}$$
$$2H = \{2\times1,\ 2\times6\} = \{2, 5\}$$
$$3H = \{3\times1,\ 3\times6\} = \{3, 4\}$$
$$4H = \{4\times1,\ 4\times6\} = \{4, 3\}$$
$$5H = \{5\times1,\ 5\times6\} = \{5, 2\}$$
$$6H = \{6\times1,\ 6\times6\} = \{6, 1\}$$

Contoh 4.3

Diberikan $G = \{ P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 \}$ yaitu grup simetri tingkat 3. Di mana

$P_1 = (1), P_2 = (1,2,3), P_3 = (1,3,2), P_4 = (1,2), P_5 = (1,3), P_6 = (2,3)$ dengan

$H = \{ P_1 , P_4 \}$ adalah subgrup dari *G*. Tentukan koset kanan dan kiri dari *H* di *G*.

Jawab :

- Untuk koset kanan *H* di *G* adalah :

$$H\,P_1 = \{ h P_1 / h \in H \} = \{ P_1 P_1 , P_4 P_1 \} = \{ P_1\ P_4 \}$$

$$H\,P_4 = \{ h P_4 / h \in H \} = \{ P_1 P_4 , P_4 P_4 \} = \{ P_4\ P_1 \}$$

$$H\,P_2 = \{ h P_2 / h \in H \} = \{ P_1 P_2 , P_4 P_2 \} = \{ P_2\ P_6 \}$$

$$H\,P_5 = \{ h P_5 / h \in H \} = \{ P_1 P_5 , P_4 P_5 \} = \{ P_5\ P_3 \}$$

$$H\,P_3 = \{ h P_3 / h \in H \} = \{ P_1 P_3 , P_4 P_3 \} = \{ P_3\ P_5 \}$$

$$H\,P_6 = \{ h P_6 / h \in H \} = \{ P_1 P_6 , P_4 P_6 \} = \{ P_6\ P_2 \}$$

- Untuk koset kiri H di G adalah :

$$P_1 H = \{ P_1 h / h \in H \} = \{ P_1 P_1 , P_1 P_4 \} = \{ P_1 P_4 \}$$

$$P_4 H = \{ P_4 h / h \in H \} = \{ P_4 P_1 , P_4 P_4 \} = \{ P_4 P_1 \}$$

$$P_2 H = \{ P_2 h / h \in H \} = \{ P_2 P_1 , P_2 P_4 \} = \{ P_2 P_5 \}$$

$$P_5 H = \{ P_5 h / h \in H \} = \{ P_5 P_1 , P_5 P_4 \} = \{ P_5 P_2 \}$$

$$P_3 H = \{ P_3 h / h \in H \} = \{ P_3 P_1 , P_3 P_4 \} = \{ P_3 P_6 \}$$

$$P_6 H = \{ P_6 h / h \in H \} = \{ P_6 P_1 , P_6 P_4 \} = \{ P_6 P_3 \}$$

4.4 Semigrup *Smarandache*

Semigrup *Smarandache* merupakan konsep paling dasar yang selanjutnya digunakan dalam mempelajari tentang *Smarandache* (Kandasamy : 2002) . Dalam tulisan ini, penulis akan menjelaskan beberapa definisi yang berkaitaan dengan semigrup *Smarandache*.

Definisi 4.3: (Vasantha, 2002) Semigrup *Smarandache* didefinisikan sebagai sebuah semigrup A jika *proper subset* dari A adalah grup.

Berdasarkan definisi di atas, dapat disimpulkan bahwa semigrup *Smarandache* tidak bersifat grup. Tetapi hanya *proper subset* dari semigrup yang harus bersifat grup.

Contoh 4.4

Misalkan $(Z_{4,}, \bullet)$ merupakan himpunanan bilangan bulat modulo 4 yang bukan 0. Maka akan ditunjukkan bahwa *proper subset* dari A di Z_4 , dengan anggota $A = \{1{,}3\}$ adalah grup sehingga Z_4 merupakan semigrup *Smarandache.*

Jawab :

Tabel 4.1. $(Z_4, \bullet)$

$(\bullet)$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Berdasarkan tabel 4.1, dapat kita simpulkan bahwa Z_4 bukan grup tetapi *proper subset* $A = \{1,3\}$ memenuhi sifat grup dan hasil dari perkalian tersebut menunjukkan bahwa $A = \{1,3\} \subset Z_4$ merupakan grup. Jadi, Z_4 merupakan semigrup *Smarandache*.

Definisi 4.4: (Vasantha, 2002) Diberikan *A* semigrup *Smarandache*. *A* dikatakan semigrup *Smarandache* komutatif jika *proper subset* dari *A* adalah grup komutatif.

4.5 Koset *Smarandache*

Pada penjabaran tentang koset *Smarandache*, akan dibahas tentang koset *Smarandacche* dalam semigrup *Smarandache*. Beberapa pembuktian disertai dengan contoh.

Definisi 4.5: (Vasantha, 2002) Diberikan *A* semigrup *Smarandache*. $H \subseteq A$ merupakan grup terhadap operasi yang sama dengan *A*. $\forall\ a \in A$, maka

1. $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ disebut koset kanan *Smarandache* dari H dalam A
2. $aH = \{ah \mid h \in H\}$ dikatakan koset kiri *Smarandache* dari *H* dalam *A*.

Definisi 4.6: (Vasantha, 2002) Diberikan *S* adalah semigrup *Smarandache*. $H \subseteq S$ merupakan subgrup. Kita katakan aH adalah koset *Smarandache* dari *H* dalam *S* untuk $a \in S$ jika $Ha = aH$, yang artinya $\{ha \mid h \in H\} = \{ah \mid h \in H\}$.

Contoh 4.5

Diberikan $(Z_{12}, \bullet)$ merupakan semigrup *Smarandache*. Dapat dilihat dengan menggunakan tabel Cayley di bawah ini.

Tabel 4.2 $(Z_{12}, \bullet)$.

$(\bullet)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	6	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Proper subset dari Z_{12} adalah $A = \{3,9\}$, karena $A = \{3,9\}$ merupakan *proper subset* yang memenuhi sifat grup terhadap operasi yang sama terhadap Z_{12}, sehingga didapatlah koset kanan dari $A = \{3,9\}$ di Z_{12} , yaitu :

$A = \{3,9\}$
$A_0 = \{3\times 0, 9\times 0\} = \{0,0\}$
$A_1 = \{3\times 1, 9\times 1\} = \{3,9\}$
$A_2 = \{3\times 2, 9\times 2\} = \{6,6\}$
$A_3 = \{3\times 3,, 9\times 3\} = \{9,3\}$
$A_4 = \{3\times 4, 9\times 4\} = \{0,0\}$
$A_5 = \{3\times 5, 9\times 5\} = \{3,9\}$
$A_6 = \{3\times 6, 9\times 6\} = \{6,6\}$
$A_7 = \{3\times 7, 9\times 7\} = \{9,3\}$
$A_8 = \{3\times 8, 9\times 8\} = \{0,0\}$
$A_9 = \{3\times 9, 9\times 9\} = \{3,9\}$
$A_{10} = \{3\times 10, 9\times 10\} = \{6,6\}$
$A_{11} = \{3\times 11, 9\times 11\} = \{9,3\}$

Hasil perkalian di atas terdapat dalam Z_{12}, sehingga terbukti bahwa $A = \{3,9\}$ merupakan subgrup dari Z_{12}. Selanjutnya, akan ditunjukkan koset kanan dan koset kiri A dalam Z_{12}.

Untuk $4 \in Z_{12}$, didapat koset kanan dan koset kiri A dalam Z_{12} dengan $4A = \{0\}$ dengan cara :

Untuk koset kanan :

$4A = \{4\times 3, 4\times 9\} = \{0,0\} = \{0\}$

Untuk koset kiri :

$A4 = \{3\times 4, 9\times 4\} = \{0,0\} = \{0\}$

Sedangkan untuk $1 \in Z_{12}$, koset kanan dan koset kiri untuk A dalam Z_{12} dengan $1A = \{3,9\}$. Hasil tersebut didapat dengan menggunakan cara yang sama seperti di atas.

4.6 Sifat Koset *Smarandache*

Sifat koset *Smarandache* yang akan dibahas adalah dengan membuktikan teorema yang berhubungan dengan koset.

Teorema 4.3 : (Vasantha, 2002) Diberikan S adalah semigrup *Smarandache*. *A* *proper subset* dari S $(A \subset S)$ merupakan grup dengan operasi yang sama terhadap

S. Tidak terdapat bentuk korespondensi satu-satu di antara dua koset kanan dalam *A* pada semigrup *Smarandache* di *S*.

Bukti :

Teorema di atas akan dibuktikan secara kontradiksi bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara dua koset kanan dalam *A* pada semigrup *Smarandache S*.

Diberikan *S* adalah grup dan *A* adalah subgrup dari *S*.

$\forall a_1$ dan a_2 merupakan koset kanan pada *S*. Akan ditunjukkan bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara dua koset kanan *S Smarandache*. Andaikan setiap korespondensi satu-satu antara koset kanan *A* dalam semigrup *Smarandache S*, yang berarti :

$\forall a_1, a_2 \in S$ maka berlaku $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 A = a_2 A$.

Hal di atas kontradiksi dengan teorema.

Jadi, tidak terdapat korespondensi satu-satu antara dua koset kanan *A* *Smarandache* ■.

Contoh 4.6

Diberikan $S = (Z_{10}, \bullet)$ adalah semigrup *Smarandache.* Apakah terdapat korespondensi satu-satu antara dua buah koset semigrup *Smarandache* pada Z_{10}.

<u>Jawab</u> :

$S = Z_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ merupakan semigrup *Smarandache* dengan perkalian modulo 10. Ambil $A_1 = \{1,9\} \subset Z_{10}$ merupakan *proper subset* yang bersifat grup terhadap operasi perkalian yang sama dengan Z_{10}. Dengan menggunakan tabel 4.2 maka akan terlihat jelas bahwa *A* merupakan subgrup dari Z_{10}.

Tabel 4.3. $(Z_{10}, \bullet)$.

$(\bullet)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	**0**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Karena hasil perkalian A merupakan anggota himpunan dari Z_{10}, maka terbukti bahwa $A = \{1,9\} \subset Z_{10}$. Kita lihat bahwa $0A = \{0\}, 3A = \{3,7\}, 5A = \{5,5\} = \{5\}$.

$A = \{1,9\}$
$0A = \{(0\times1),(0\times9)\} = \{0,0\} = \{0\}$
$1A = \{(1\times1),(1\times9)\} = \{1,9\}$
$2A = \{(2\times1),(2\times9)\} = \{2,8\}$
$3A = \{(3\times1),(3\times9)\} = \{3,7\}$
$4A = \{(4\times1),(4\times9)\} = (4,6\}$
$5A = \{(5\times1),(5\times9)\} = \{5,5\}$
$6A = \{(6\times1),(6\times9)\} = \{6,4\}$
$7A = \{(7\times1),(7\times9)\} = \{7,3\}$
$8A = \{(8\times1),(8\times9)\} = \{8,2\}$
$9A = \{(9\times1),(9\times9)\} = \{9,1\}$

Untuk melihat apakah koset tersebut merupakan pemetaan injektif, maka :

$\Rightarrow x_1 A \ = x_2 A$

tetapi $\Rightarrow 3A \ \neq 5A$

Penjelasan di atas kontradiksi dengan teorema sehingga dapat dilihat bahwa tidak terdapat korespondensi satu-satu di antara dua buah koset kanan dari A dalam semigrup *Smarandache*. Dengan cara yang sama, kita misalkan kembali

$A_2 = \{2,4,6,8\}$ di mana A_2 merupakan subgrup dengan 6 sebagai elemen identitas sehingga dapat dilihat dari tabel Cayley di bawah ini :

Tabel 4.4 $A_2 = \{2,4,6,8\}$ subgrup dari Z_{10}.

$(\bullet)$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa $A_2 = \{2,4,6,8\}$ merupakan subgrup dari Z_{10} . Koset dari A_2 adalah:

$$A_2 = \{2,4,6,8\}$$
$$1A_2 = \{(1\times 2),(1\times 4),(1\times 6),(1\times 8)\} = \{2,4,6,8\}$$
$$2A_2 = \{(2\times 2),(2\times 4),(2\times 6),(2\times 8)\} = \{4,8,2,6\}$$
$$3A_2 = \{(3\times 2),(3\times 4),(3\times 6),(3\times 8)\} = \{6,2,8,4\}$$
$$4A_2 = \{(4\times 2),(4\times 4),(4\times 6),(4\times 8)\} = \{8,6,4,2\}$$
$$5A_2 = \{(5\times 2),(5\times 4),(5\times 6),(5\times 8)\} = \{0,0\} = \{0\}$$
$$6A_2 = \{(6\times 2),(6\times 4),(6\times 6),(6\times 8)\} = \{2,4,6,8\}$$
$$7A_2 = \{(7\times 2),(7\times 4),(7\times 6),(7\times 8)\} = \{4,8,2,6\}$$
$$8A_2 = \{(8\times 2),(8\times 4),(8\times 6),(8\times 8)\} = \{6,2,8,4\}$$
$$9A_2 = \{(9\times 2),(9\times 4),(9\times 6),(9\times 8)\} = \{8,6,4,2\}$$

dapat dilihat bahwasanya $3A_2 = \{6,2,8,4\}$ dan $5A_2 = \{0\}$ maka

$\Rightarrow x_1A_2 \;\; = x_2A_2$

$\Rightarrow 3A_2 \;\; \neq 5A_2$

Sehingga terbukti bahwa tidak terdapat korespondensi satu-satu di antara koset kanan $A_2 = \{2,4,6,8\}$ dalam Z_{10}.

4.7 Perbedaan Sifat Koset dengan Koset *Smarandache* .

Dari pembahasan yang telah dijabarkan pada bab sebelumnya, maka didapatlah perbedaan sifat antara koset dengan koset *Smarandache*, yaitu sebagai berikut :

1. Pada koset terdapat korespondensi satu-satu antara dua koset kanan *H* dalam *G*. Hal ini dikarenakan konsep dasar yang digunakan dalam menentukan subgrup *H* suatu grup adalah himpunan *G* tersebut harus bersifat grup.
2. Pada koset *Smarandache* tidak terdapat korespondensi satu-satu antara dua koset kanan *A* di *S*. Hal ini dikarenakan konsep dasar yang digunakan dalam *Smarandache* ini adalah semigrup. Semigrup tidak bersifat grup. Hanya *proper subset A* dari semigrup *Smarandache* yang harus bersifat grup.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Semigrup *Smarandache* merupakan suau himpunan yang memiliki *proper subset* yang bersifat grup. Bentuk koset pada semigrup *Smarandache* sama dengan koset yang telah dipelajari dalam aljabar abstrak. Yang membedakan antara dua bentuk koset tersebut adalah terletak pada salah satu sifatnya yaitu

- Pada koset aljabar abstrak terdapat bentuk bijektif (korespondensi satu-satu) antara dua koset kanan H dalam G. Hal ini dikarenakan dalam menentukan koset dalam aljabar abstrak menggunakan G suatu grup.
- Sedangkan pada koset *Smarandache* tidak terdapat bentuk bijektif (korespondensi satu-satu) antara dua koset kanan A dalam S pada semigrup *Smarandache* karena dalam menentukan koset yang digunakan adalah semigrup S. Yang harus bersifat grup hanya *proper subset*nya.

5.2 Saran

Pada penulisan ini dibahas tentang konsep dasar dalam pengenalan semigrup *Smarandache* dan menentukan sifat dari koset *Smarandache* . Bagi pembaca yang tertarik dapat melanjutkan tulisan ini dengan mengembangkan dari konsep pada semigrup *Smarandache* yang lainnya.

Daftar Pustaka

Herstein.I.N., “*Topics in Algebra*”, Wiley, J., Sons University of Chicago 2(2000), 26-118.

http://sigmetris.com/index.php?option=com_content&task=view&id=19&Itemid=28, diakses pada tanggal 28-12-2009.

Kandasamy, W.B. Vasantha,” *Smarandache Semigroup*” American Research Press, Rehoboth, 2002.

Padila, Raul, “ *Smarandache Algebraic Structure*”, Bulletin of Pure and Applied Sciences, Delhi, Vol.17 E., No.1, 119-121,(1998).

Soebagio, Suharti dan Sukirman, “*Struktur Aljabar*”, Universitas Terbuka, Depdikbud, Jakarta, 1999.

Sukirman, “*Pengantar Aljabar Abstrak*”, Universitas Negeri Malang-Press, Malang, 1986.